Suggerimenti per esercizi

Sergio Venturini

5 dicembre 2016

1 Inversa di una matrice

Esercitarsi in Inversa di una matrice

2 Indipendenza lineare

Verificare che le seguenti funzioni sono linearmente indipendenti

- (a)
$$te^t,\ t^2e^t,\ t^3e^t.$$
- (b)
$$e^t,\ \cos(t),\ \sin(t).$$
(Suggerimento: dimostrare che $\cos(t)$ e $\sin(t)$ sono linearmente indipendenti e poi verificare che e^t *non* è combinazione lineare di $\sin(t)$ e $\cos(t)$).

3 Spazi e sottospazi vettoriali

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4$$

e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 + t_2 \\ x_2 &= t_1 - t_2 \\ x_3 &= 5t_1 + 2t_2 \\ x_4 &= t_1 - 4t_2. \end{aligned}$$

Scrivere tramite equazioni ed in forma parametrica l'intersezione V tra il nucleo di f ed l'immagine di g. Che dimensione ha V? (Suggerimento: le equazioni dell'intersezione V si trovano aggiungendo all'equazione

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

le equazioni che si ottengono eliminando t_1 e t_2 dalle equazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 + t_2 \\ x_2 &= t_1 - t_2 \\ x_3 &= 5t_1 + 2t_2 \\ x_4 &= t_1 - 4t_2. \end{aligned}$$

La forma parametrica si trova risolvendo il sistema ottenuto.)

4 Cambio di base

Se $q(t)$ è un polinomio a coefficienti reali indichiamo con

$$\frac{1}{q(t)}\mathbb{R}_d[t]$$

lo spazio delle funzioni razionali della forma

$$\frac{p(t)}{q(t)}$$

con $p(t)$ polinomio di grado minore o uguale a d.

Nello spazio

$$\frac{1}{(t-3)(t+3)(t+4)}\mathbb{R}_2[t]$$

Trovare la matrice di passaggio tra la base

$$\frac{1}{(t-3)(t+3)(t+4)}, \frac{t}{(t-3)(t+3)(t+4)}, \frac{t^2}{(t-3)(t+3)(t+4)}$$

e la base

$$\frac{1}{t-3}, \frac{1}{t+3}, \frac{1}{t+4}$$

e la relativa inversa.

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -12 & -9 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{42} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{16}{7} \end{pmatrix}$$